$(\mathrm{mult}_a(-1) = 1)$ $\qquad$ $(\mathrm{mult}_a(1) = 2)$

(ii) $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longleftarrow \mathrm{mult}_g(1) = 2$

$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \longleftarrow \mathrm{mult}_g(-1) = 1$

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ (d'après le premier THM).

$\Longrightarrow$ A diagonalisable

De façon explicite, on peut écrire

$$A = P \cdot \underbrace{D}_{} \cdot P^{-1}$$

avec D diagonale

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{valeurs propres}}$$

et

$$P = \left[\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n \right]$$

où $\boxed{\bar{v}_i}$ est vecteur propre de valeur propre $\boxed{\lambda_i}$

⚠ Même ordre !!

Dans ce cas particulier

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$$

$\boxed{\text{THM 10.17}}$ Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{mult}_a(\lambda_j) = \mathrm{mult}_g(\lambda_j)$ $\forall \lambda_j$ valeur propre de A

$\boxed{\text{Application}}$: Calcul de puissances de matrices diagonalisables

Si $\boxed{A = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}}$ (*) avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in M_n(\mathbb{R})$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(P inversible)

Est-ce qu'on trouver une formule "facile" pour

$$A^N = \boxed{P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^N, \dots, \lambda_n^N) \cdot P^{-1}}$$ avec $N \in \mathbb{N}^*$?

(utilisez $(*)$!) (et $A^N := \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{N \text{ facteurs}}$)

Car

$$A^N = (P \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underbrace{\cancel{P^{-1}}) \cdot (\cancel{P}}_{Id} \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underbrace{\cancel{P^{-1}}) \cdot \cancel{\dots}}_{Id}$$

$$\underbrace{\cancel{} \cdot (\cancel{P}}_{Id} \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1})$$

$= P \operatorname{diag}(\lambda_1^N, \dots, \lambda_n^N) \cdot P^{-1}$ ✓

$\boxed{\text{EXM (suite)}}$ Calculer A^{1000}.

(pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$)

$$A^{1000} = P \cdot \underbrace{\operatorname{diag}(1^{1000}, 1^{1000}, (-1)^{1000})}_{= \operatorname{diag}(1,1,1) = I_3} \cdot P^{-1}$$

$$= P \cdot I_3 \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_3$$ ✓

$\boxed{\text{Un modèle de "population" simplifié}}$ (Leslie)

On étudie l'évolution d'une population d'organismes du même type dans le temps :

(1) chaque organisme a une durée de vie maximale de N jours $\xrightarrow[\text{simplifier}]{\text{Pour}}$ $\boxed{N=3}$

on peut considérer

$\hookrightarrow$ on va noter l'âge d'un organisme avec $1 \leq i \leq N$

(2) si un organisme a âge i $\longrightarrow$ la probabilité de survie encore un

jour est

$p_{i+1 \leftarrow i} \in [0,1]$

$r_i = \#$ d'organismes qu'un organisme d'âge i engendre

Déf

$q_i(K) :=$ quantité d'organismes d'âge i au jour K

$$\text{A} \quad q_1(K+1) = r_1\, q_1(K) + r_2 \cdot q_2(K) + \dots + r_{\underbrace{N}_{=3}}\, q_{\underbrace{N}_{=3}}(K)$$

$$\text{B} \quad q_i(K+1) = p_{i\leftarrow i-1}\, q_{i-1}(K) \quad \forall\, 1 < i \leq N = 3$$

Pour $\boxed{N=3}$

$$\bar{q}(K) = \begin{pmatrix} q_1(K) \\ q_2(K) \\ q_3(K) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\bar{q}(K+1) = \begin{pmatrix} r_1\, q_1(K) + r_2\, q_2(K) + r_3\, q_3(K) \\ p_{2\leftarrow 1} \cdot q_1(K) \\ p_{3\leftarrow 2} \cdot q_2(K) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_{2\leftarrow 1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{3\leftarrow 2} & 0 \end{pmatrix}}_{:= L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{pmatrix}}_{\bar{q}(k)}$$

En conséquence

$$q(n) = \underbrace{L^n}_{\text{On veut calculer } L^n \text{ !!!}} \cdot \bar{q}(0)$$

EXM 10,22

On suppose que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\underline{q}(n)$ pour n q.c.q.

quelconque

$\boxed{\text{Diagonaliser } L\ !!!}$

① Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda + 6 \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{Critère}} \underset{\text{racines}}{\{-1, -2, 3\}}$$

② Vecteurs propres :