

$$(\text{mult}_{-1}(-1) = 1)$$

$$(\text{mult}_2(1) = 2)$$

$$(ii) \quad \Gamma_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{mult}_2(1) = 2$$

$$\Gamma_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{mult}_2(-1) = 1$$

$$(iii) \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^3 \text{ (d'après le premier THM).}$$

\Rightarrow A diagonalisable

De façon explicite, on peut écrire

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

avec D diagonale

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

valeurs propres

et

$$P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

où \bar{v}_i est vecteur propre de valeur propre λ_i

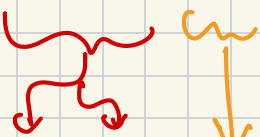


Même ordre !!!

Dans ce cas particulier

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et



$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, -1)$$

THM 10.17 Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

A diagonalisable $\iff \text{mult}_a(\lambda_j) = \text{mult}_g(\lambda_j)$
 $\forall \lambda_j$ valeur propre de A

Application : Calcul de puissances de matrices diagonalisables

Si $A = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$ (*avec $A \in M_n(\mathbb{R})$
 $P \in M_n(\mathbb{R})$)

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (P \text{ inversible})$$

Est-ce qu'on trouve une formule facile par
 $A^N = P \cdot \text{diag}(\lambda_1^N, \dots, \lambda_n^N) \cdot P^{-1}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$?
 (utilisez (*) !) (et $A^N := \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_N$)

Czy

$$A^N = \underbrace{\left(P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \right)}_{\text{Id}} \cdot \underbrace{\left(P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \right)}_{\text{Id}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \right)}_{\text{Id}}$$

$$= P \operatorname{diag}(\lambda_1^N, \dots, \lambda_n^N) \cdot P^{-1} \quad \checkmark$$

EXM (suite) | Calculer A^{1000} .

(pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$)

$$A^{1000} = P \cdot \operatorname{diag}(1^{1000}, 1^{1000}, (-1)^{1000}) \cdot P^{-1}$$

$$= \operatorname{diag}(1, 1, 1) = I_3$$

$$= P \cdot I_3 \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_3 \quad \checkmark$$

Un modèle de "population" simplifiée (Leslie)

On étudie l'évolution d'une population d'organismes du même type dans le temps :

(1) chaque organisme a une durée de vie maximale de N jours

$\overset{Q_{avr}}{\curvearrowright}$
simplifier
ou peut
considérer

$N=3$

→ on va noter l'âge d'un organisme avec $1 \leq i \leq N$

(2) si un organisme a l'âge $i \rightarrow$ la probabilité de survie encore un

jour est
 $p_{i+1} \leftarrow i \in [0, 1]$

$\rightarrow r_i = \#$ d'organismes qu'un
organisme d'âge i engendre

Déf $f_i(K) :=$ quantité d'organismes d'âge
 i 20 jour K

$$\textcircled{A} \quad q_1(k+1) = r_1 q_1(k) + r_2 q_2(k) + \dots + r_N q_N(k)$$

$$\textcircled{B} \quad q_i(k+1) = p_{i \leftarrow i-1} q_{i-1}(k) \quad \forall 1 < i \leq N$$

Pour $\boxed{N=3}$

$$\vec{q}(k) = \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\vec{q}(k+1) = \begin{pmatrix} r_1 q_1(k) + r_2 q_2(k) + r_3 q_3(k) \\ p_{2 \leftarrow 1} q_1(k) \\ p_{3 \leftarrow 2} q_2(k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{L} \cdot \underbrace{\hspace{5em}}_{\vec{q}(k)}$

En conséquence

$$q(n) = L^n \cdot q(0)$$

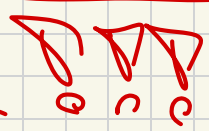
On veut calculer L^n

EXM 10,22

On a ppde q_f

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\bar{q}(n)$ pour n q.c.q. quelconque

Diagonaliser L 

~~Valeurs propres:~~

① $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda + 6$

Critère r zcinq
de Gauss $\rightarrow \{-1, -2, 3\}$

② Vecteurs propres: